Limites, $\mathcal{C}^0$

→ f possède une limite en a selon A ($a \in \bar{A}$)

$\Updownarrow$ $\exists \ell : \forall V \in \mathcal{V}(\ell)\ \exists U \in \mathcal{V}(a)\ f(U \cap A) \subset V$

$\Updownarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in A\ d(a,x) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), \ell) < \varepsilon$

→ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$, si $a \in A$: $f(a) = \ell$

→ Composition $\left\{ \begin{array}{l} f : A \to Y \\ a \in \bar{A} \end{array} \right.$ $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f = b$ $\left\{ \begin{array}{l} g : B \to Z \\ b \in \bar{B} \end{array} \right.$ $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \in B}} g = \ell$

Alors $\exists \lim\limits_{\substack{x \in A \\ x \to a}} g \circ f = \ell$.

→ Crit. séquentiel : f a une lim en a $\Leftrightarrow$ $\forall x_n \to a$ $f(x_n)$ converge

---

→ f est $\mathcal{C}^0$ en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f(x)$ existe ($a \in A$)

$\Updownarrow$ $\forall V \in \mathcal{V}(f(a))\ \exists U \in \mathcal{V}(a)\ f(U) \subset V$

$\Updownarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in X\ d(a,x) < \eta \Rightarrow \delta(f(a), f(x)) < \varepsilon$

↳ Crit. séq : f $\mathcal{C}^0$ en a $\Updownarrow$ $\forall x_n \to a$ $f(x_n)$ CV (vers $f(a)$)

→ $\mathcal{C}^0$ locale : f $\mathcal{C}^0$ en a $\Leftrightarrow$ $\forall V \in \mathcal{V}(f(a))$ $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$

imp → $\mathcal{C}^0$ globale : f est continue sur X

$f : X \to Y$

$\Updownarrow$ Pour tout ouvert Ω ds Y, $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert ds X

$\Updownarrow$ Pour tout fermé F ds Y, $f^{-1}(F)$ fermé ds Y

$\xrightarrow[\text{stricte}]{\text{mini}}$ $f : X \to Y$ $\mathcal{C}^0 \iff \forall A \in \mathcal{P}(X)\ f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

monomorphismes : morphismes de groupes et de corps de $\mathbb{R}$

$\longrightarrow$ f homéomorphisme $\iff$ f bijective et f^{-1} $\mathcal{C}^0$

$\longrightarrow$ f k-lip $\iff \forall (x,y) \in X^2\ \delta(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y)$

(exemples de k-lip)

$\longrightarrow$ f unif $\mathcal{C}^0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x, x' \in X\ d(x,x') < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) < \varepsilon$

$\hookrightarrow$ sur $\mathbb{C}$: f $\mathcal{C}^0$ sur un segment $\Rightarrow$ unif $\mathcal{C}^0$ + exemples